Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет»
Факультет математики, информационных и авиационных технологий

Юрьева О.Д.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «Функциональный анализ»

для студентов специальностей 10.05.01 «Компьютерная безопасность» и 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем»

Ульяновск, 2019

Методические указания для самостоятельной работы по дисциплине «Функциональный анализ» для студентов специальностей 10.05.01 «Компьютерная безопасность» и 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем»/ составитель: Юрьева О.Д. – Ульяновск: УлГУ, 2019.

Настоящие методические указания предназначены для студентов очной формы обучения специальностей 10.05.01 «Компьютерная безопасность» и 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем» для самостоятельной работы по дисциплине «Функциональный анализ». В пособии представлена литература по дисциплине, основные темы курса и рекомендации по самостоятельному изучению теоретического и практического материала.

Методические указания будут полезны студентам при подготовке к лекционным и практическим занятиям, а также к зачёту по данной дисциплине.

Рекомендованы к введению в образовательный процесс Ученым Советом Факультета математики, информационных и авиационных технологий УлГУ (протокол номер 2/19 от 19 марта 2019 г.).

1. ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

основная

1. Колмогоров, Андрей Николаевич. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник для матем. спец. ун-тов / Колмогоров Андрей Николаевич, С. В. Фомин. - 6-е изд., испр. - Москва : Наука, 1989.

2. Богданов, А. Ю. Лекции по функциональному анализу : учеб. пособие / А. Ю. Богданов. - Ульяновск : УлГУ, 2003. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/984/bogdanov.pdf

3. Треногин В.А., Функциональный анализ : Учебник. / Треногин В.А. - 3-е изд., испр. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 488 с. - ISBN 5-9221-0272-9 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922102729.html

дополнительная

1. Лебедев В.И., Функциональный анализ и вычислительная математика : Учеб. пособие. / Лебедев В.И. - 4-е изд., перераб. и доп. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 296 с. - ISBN 5-9221-0092-0 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922100920.html
2. Люстерник, Лазарь Аронович. Краткий курс функционального анализа : учеб. пособие для вузов / Люстерник Лазарь Аронович, В. И. Соболев. - 2-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2009
3. Ревина С.В., Функциональный анализ в примерах и задачах : учебное пособие / Ревина С.В., Сазонов Л.И. - Ростов н/Д : Изд-во ЮФУ, 2009. - 120 с. - ISBN 978-5-9275-0683-5 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785927506835.html
4. Осиленкер, Б. П. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учебно-практическое пособие / Б. П. Осиленкер. — Москва : Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2015. — 132 с. — ISBN 978-5-7264-1186-6. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/60819.html

учебно-методическая

1. Богданов, Андрей Юрьевич. Методы функционального анализа в вычислительной математике : учеб.-метод. пособие. Ч. 1 : / Богданов Андрей Юрьевич ; УлГУ, ФМИТ. - Ульяновск : УлГУ, 2012. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/231/bogdanov3.pdf
2. Богданов, Андрей Юрьевич. Методы функционального анализа в вычислительной математике : учеб.-метод. пособие. Ч. 2 : / Богданов Андрей Юрьевич ; УлГУ, ФМиИТ. - Ульяновск : УлГУ, 2015. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/242/bogdanov-2_2015.pdf
3. Богданов, Андрей Юрьевич.Задачи и упражнения по функциональному анализу : учеб.-метод. пособие / Богданов Андрей Юрьевич. - Ульяновск : УлГУ, 2008.URLhttp://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/985/bogdanov1.pdf

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1) Раздел 1. Метрические пространства

Тема 1. *Метрическое пространство. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве. Предельные точки, точки прикосновения, сходимость.*

С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Колмогоров, А. Н.. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник для матем. спец. ун-тов / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. - 6-е изд., испр. - Москва : Наука, 1989. – 624 с. : С. 65–77 – изучение теоретического материала, С. 57-64 – рассмотрение примеров.
2. Богданов, А.Ю. Лекции по функциональному анализу : учеб. пособие / А.Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГУ, 2003. – 66 с. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/984/bogdanov.pdf
С. 5–8 – изучение теоретического материала и рассмотрение примеров.
3. Богданов, А.Ю. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учебно-методическое пособие / А.Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГУ, 2008. – 33 с. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/985/bogdanov1.pdf С. 5 решение задач.

Тема 2. *Плотные множества. Сепарабельность. Пример сепарабельного и несепарабельного пространства. Полные метрические пространства, примеры. Неполнота пространства CLp[0,1], p>=1. Лемма о вложенных шарах. Теорема Бэра.*

С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Колмогоров, А. Н.. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник для матем. спец. ун-тов / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. - 6-е изд., испр. - Москва : Наука, 1989. – 624 с. : С. 78–86 – изучение теоретического материала, С. 74-77 – рассмотрение примеров.
2. Богданов, А.Ю. Лекции по функциональному анализу : учеб. пособие / А.Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГУ, 2003. – 66 с. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/984/bogdanov.pdf
С. 8–11 – изучение теоретического материала и рассмотрение примеров.
3. Богданов, А.Ю. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учебно-методическое пособие / А.Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГУ, 2008. – 33 с. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/985/bogdanov1.pdf С. 5–7 решение задач.

Тема 3. *Компактные и предкомпактные множества в метрическом пространстве. Предкомпактность и вполне ограниченность. Теорема Хаусдорфа. Компактные метрические пространства. Связь с предкомпактностью и замкнутостью. Теорема Арцела. Критерий компактности в l_p, p>=1.*

С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Колмогоров, А. Н.. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник для матем. спец. ун-тов / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. - 6-е изд., испр. - Москва : Наука, 1989. – 624 с. : С. 124–134 – изучение теоретического материала, С. 125-126 – рассмотрение примеров.
2. Богданов, А.Ю. Лекции по функциональному анализу : учеб. пособие / А.Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГУ, 2003. – 66 с. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/984/bogdanov.pdf
С. 26–30 – изучение теоретического материала и рассмотрение примеров.

3. Богданов, А.Ю. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учебно-методическое пособие / А.Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГУ, 2008. – 33 с. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/985/bogdanov1.pdf С. 8 решение задач.

Тема 4. *Принцип сжимающих отображений. Примеры.*

С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Колмогоров, А. Н.. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник для матем. спец. ун-тов / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. - 6-е изд., испр. - Москва : Наука, 1989. – 624 с. : С. 87–91 – изучение теоретического материала, С. 91-97 – рассмотрение примеров.

2. Богданов, А.Ю. Лекции по функциональному анализу : учеб. пособие / А.Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГУ, 2003. – 66 с. URL
http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/984/bogdanov.pdf
С. 31 – изучение теоретического материала и рассмотрение примеров.

3. Богданов, А.Ю. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учебно-методическое пособие / А.Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГУ, 2008. – 33 с. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/985/bogdanov1.pdf С. 8–9 решение задач.

Контрольные вопросы по разделу

1. Дать общее определение метрического пространства.
2. Привести пример конечномерного и бесконечномерного метрического пространства.
3. Привести пример нескольких метрик в одном и том же пространстве-носителе.
4. Привести пример сепарабельного и несепарабельного метрического пространства.
5. Может ли быть подпространство несепарабельного пространства быть сепарабельным? Пояснить на примере.
6. Привести 2 примера неполных метрических пространств.
7. Всегда ли неполное метрическое пространство обладает пополнением?
8. Может ли всюду неплотное множество быть несчетным? Привести пример.
9. Показать, что из компактности следует предкомпактность.
10. Показать, что обратное утверждение к п.9 неверно.
11. Показать, что замкнутый единичный шар в общем случае не компакт и даже не предкомпакт. Привести пример.
12. Является ли в общем случае предел равномерно сходящейся последовательности гладких функций гладкой функцией?
13. Что такое метод последовательных приближений и как он связан с принципом сжимающих отображений?
14. Существует ли связь между интегральным уравнением Вольтерра и некоторым дифференциальным уравнением?
15. Если оператор является сжимающим во второй степени, то будет ли существовать единственная неподвижная точка?
16. Какое уравнение является частным случаем другого: уравнение Вольтерра или уравнение Фредгольма 2-го рода?

Задачи для самостоятельной работы по разделу

1. Проверить, является ли (X, ρ) корректно определённым метрическим пространством, если:

1) $X = \mathrm{R}, \quad \rho(x,y) = \cos^2(x-y);$

2) $X = \mathrm{R}, \quad \rho(x,y) = |\sin(x-y)|;$

3) $X = \mathrm{R}, \quad \rho(x,y) = |\,arctg(x) - arctg(y)|;$

4) $X = \mathrm{R}, \quad \rho(x,y) = arctg\,|x-y|;$

5) $X = \mathrm{R}, \quad \rho(x,y) = \ln(1+|x-y|);$

6) $X = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right), \quad \rho(x,y) = |\sin(x-y)|;$

7) $X = \mathrm{R}^n, \quad \rho(x,y) = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i - y_i|;$

8) $X = \mathrm{R}^n, \quad \rho(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|;$

9) $X = \mathrm{R}^n, \quad \rho(x,y) = \sum\limits_{i=0}^{n} (x_i - y_i)^2;$

10) $X = C[a,b]$ - пространство непрерывных на $[a,b]$ функций, $\rho(f,g) = \max\limits_{a\le x\le b} |f(x) - g(x)|;$

11) $X = C[0,1], \quad \rho(f,g) = \max\limits_{0\le x\le \frac{1}{2}} |f(x) - g(x)|.$

2. Пусть функция $f : \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(0) = 0$;
2) $f(x) > 0$ при $x > 0$;
3) $f(x)$ не убывает при $x > 0$;
4) $\dfrac{f(x)}{x}$ не возрастает при $x > 0$.

Доказать, что если $\rho(x,y) = f(|x-y|)$, то (R, ρ) – корректно заданное метрическое пространство.

3. Доказать, что пространство l_2 сепарабельно

$$\left(l_2 = \left\{ (x_1, \ldots x_n, \ldots) \mid x_k \in \mathrm{C}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \right\}, \quad \rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^2} \right).$$

4. Доказать, что пространство l_p сепарабельно

$$\left(l_p = \left\{ (x_1, \ldots x_n, \ldots) \mid x_k \in \mathrm{C}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}, \quad \rho(x,y) = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p} \right).$$

5. Проверить, является ли сепарабельным пространство $l_\infty = \{(x_1, \ldots x_n, \ldots) \mid x_k \in \mathrm{C}, \quad \exists C_0 : |x_k| < C_0 \ \forall k\}, \quad \rho(x,y) = \sup\limits_{1\le k\le\infty} |x_k - y_k|$ – пространство ограниченных последовательностей.

6. Проверить, является ли сепарабельным пространство $C_0 = \{(x_1,\ldots x_n,\ldots) \mid x_k \in \mathrm{C}, |x_k| \to 0\}$, $\rho(x,y) = \sup\limits_{1 \le k \le \infty} |x_k - y_k|$ – пространство сходящихся к нулю последовательностей.

7. Проверить, является ли сепарабельным пространство $C[a,b]$ с метрикой $\rho(f,g) = \max\limits_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)|$.

8. Проверить, является ли сепарабельным пространство $M[0,1]$ – пространство ограниченных на $[0,1]$ функций с метрикой $\rho(f,g) = \sup\limits_{0 \le x \le 1} |f(x) - g(x)|$.

9. Проверить, является ли сепарабельным пространство $E[0,1] = \left\{ f:[0,1] \to \mathrm{R} \mid f(x) \ne 0 \Rightarrow x \in \{x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots\},\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} f^2(x_k) < \infty \right\}$ – пространство функций, принимающих ненулевые значения лишь в счётном множестве точек (множество своё для каждой функции) – с метрикой $\rho(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} (f(x_k) - g(x_k))^2}$, где суммирование ведётся по всем x_k, в которых f и g не обращаются в нуль одновременно.

10. Проверить на полноту метрические пространства из задачи 1.

11. Проверить на полноту пространство $l_2 = \left\{ x = (x_1, \ldots x_n, \ldots) \mid x_k \in \mathrm{C},\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \right\}$.

12. Является ли полным пространство $C[a,b]$ – пространство непрерывных на $[a,b]$ функций с метрикой $\rho(f,g) = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$?

13. Является ли полным пространство $M[0,1]$ – пространство ограниченных на $[0,1]$ функций с метрикой $\rho(f,g) = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$?

14. Показать, что пространство $CL_p[a,b]$ – пространство непрерывных на $[a,b]$ функций с метрикой $\rho(f,g) = \left(\int\limits_a^b | f(x) - g(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$ – не является полным.

15. Является ли пространство $C^1[a,b]$ – непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций с метрикой $\rho(f,g) = \max\limits_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)|$ полным?

16. Исследовать на полноту пространство $C[0,1]$ с метрикой

$\rho(f,g)=\max\limits_{0\le x\le 1}\left(x|\ f(x)-g(x)|\right)$, предварительно установив её корректность.

17. Пусть $\varphi(x)\in C[a,b]$. Каковы необходимые и достаточные условия того, что пространство $C[a,b]$ с метрикой $\rho(f,g)=\max\limits_{a\le x\le b}\left|\varphi(x)\right|f(x)-g(x)\left|\right|$ будет полным метрическим пространством? ($\varphi(x)$ полагается не равной нулю тождественно).

18. Является ли полным пространство $P[a,b]$ – пространство полиномов от переменной x – с метрикой $\rho(P(x),Q(x))=\max\limits_{a\le x\le b}\left|P(x)-Q(x)\right|$?

19. Является ли полным пространтсво финитных последовательностей $l_f=\left\{x=(x_1,\dots x_n,\dots)\,|\ \text{лишь конечное число } x_i \text{ отлично от } 0\right\}$ с метрикой $\rho(x,y)=\sup\limits_{1\le k\le\infty}|\ x_k-y_k\,|$?

20. Исследовать на полноту пространство сходящихся к нулю последовательностей $C_0=\left\{(x_1,..x_n,\dots)\,|\,\left|x_k\right|\to 0\right\}$ с метрикой $\rho(x,y)=\sup\limits_{1\le k\le\infty}|\ x_k-y_k\,|$.

21. Исследовать на полноту пространство $F(-\infty,\infty)$ - непрерывных финитных функций (т.е. $f\in F(-\infty,\infty)\Leftrightarrow f$ непрерывна на $(-\infty,\infty)$ и $\exists \mathrm{M}>0:\ f(x)=0\ \forall x\notin[-\mathrm{M},\mathrm{M}]$) с метрикой $\rho(f,g)=\sup\limits_{-\infty\le x\le\infty}|\,f(x)-g(x)\,|$.

22. Исследовать на полноту пространство $C(-\infty,\infty)$ – непрерывных и ограниченных на $(-\infty,\infty)$ функций с метрикой $\rho(f,g)=\sup\limits_{-\infty\le x\le\infty}|\,f(x)-g(x)\,|$.

23. Показать, что множество $M\subset l_2$, $M=\left\{x=(x_1,\dots x_n,\dots)\,|\,\left|x_k\right|\le\dfrac{1}{2^k}\right\}$ («гильбертов кирпич») является компактом в l_2.

24. Пусть $M\subset C[0,1]$, причём $\exists C\colon f(x)\le C\quad\forall x\in[0,1]\quad\forall f\in M$. Рассмотрим множество $\Phi=\left\{\int\limits_0^x f(t)dt\,|\ f\in M\right\}$. Доказать, что Φ является предкомпактом в $C[0,1]$.

25. Пусть $M_n\subset C[0,1]$, $M_n=\left\{a_n^\alpha x^n+a_{n-1}^\alpha x^{n-1}+\dots+a_1^\alpha x+a_0^\alpha\right\}_\alpha$ – некоторое множество полиномов от x степени n. Доказать, что M_n предкомпактно $\Leftrightarrow$ коэффициенты $\left\{a_0^\alpha,\dots a_n^\alpha\right\}_\alpha$ ограничены в совокупности (т.е. $\exists \mathrm{C}:\ \forall P\in M_n$, $P(x)=b_nx^n+\dots+b_0\Rightarrow b_i\le C\quad\forall i$).

26. Доказать, что единичный шар (и даже единичная сфера) в $C[0,1]$ не является предкомпактом.

27. Доказать, что единичный шар (и даже единичная сфера) в l_2 не является предкомпактом.

28. Оценить ε, при которых оператор $A\colon C[a,b] \to C[a,b],\ Af(x) = \varepsilon f^2(x)$ будет сжимающим в шаре $B[0,1] = \left\{ f \in c[a,b] \mid \max\limits_{a \le x \le b} |f(x)| \le 1 \right\}$.

29. Пусть $f(x) \in C^1[a,b], \quad f:[a,b] \to [a,b], \quad |f'(x)| < 1 \quad \forall x \in [a,b]$. Доказать, что уравнение $f(x) = x$ имеет единственное решение на $[a,b]$. Показать, что условие $f:[a,b] \to [a,b]$ существенно.

30. Доказать, что достаточным условием существования единственного решения матричного уравнения $x = \mathrm{A}x + b$ $\left(\mathrm{A} \in M_n(\mathrm{R}) - \text{матрица } n \times n; \quad x, b \in \mathrm{R}^n - \text{вектора - столбцы}; \quad \mathrm{A} = (a_{ij})\right)$ является выполнение одного из условий:

   1) $\max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1$;

   2) $\max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| < 1$;

   3) $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 < 1$.

31. Доказать, что $\forall \lambda \in \mathrm{R}, \forall K(x,t) \in C[0,1] \times [0,1], \forall g \in C[0,1]$ существует единственная функция $f(x) \in C[0,1]$, такая что $f(x) - \lambda \int\limits_0^x K(x,t) f(t) dt = g(x)$.

32. Найти λ, при которых уравнение Фредгольма второго рода имеет единственное решение $f(x) \in C[a,b]$: $f(x) - \lambda \int\limits_a^b K(x,t) f(t) dt = g(x)$, где $K(x,t) \in C[a,b] \times [a,b], \quad g(x) \in C[a,b]$.

Раздел 2. Мера, измеримые функции, интеграл Лебега

Тема 6. *Полукольцо прямоугольников в R^2 и σ-аддитивная мера на этом полукольце. Продолжение ее на кольцо элементарных множеств. Измеримые по Жордану и Лебегу множества. Теорема о σ-алгебре измеримых по Лебегу множеств. Непрерывность и полнота меры. Измеримость ограниченных открытых и замкнутых множеств. Существование неизмеримых множеств на отрезке. Обобщение меры Лебега для* *неограниченных множеств. Мера Лебега-Стилтьеса. Теорема Лебега о представлении любой меры в виде суммы специальных мер.*

С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Колмогоров, А. Н.. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник для матем. спец. ун-тов / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. - 6-е изд., испр. - Москва : Наука, 1989. – 624 с. : С. 288–322 – изучение теоретического материала, С. 316 – рассмотрение примеров.
2. Богданов, А.Ю. Лекции по функциональному анализу : учеб. пособие / А.Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГУ, 2003. – 66 с. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/984/bogdanov.pdf
С. 32-35 – изучение теоретического материала и рассмотрение примеров.
3. Богданов, А.Ю. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учебно-методическое пособие / А.Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГУ, 2008. – 33 с. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/985/bogdanov1.pdf С. 9 решение задач.

Тема 7. *Измеримые функции. Измеримость композиции функций. Измеримые функции на отрезке, критерий. Примеры. Измеримость функции, непрерывной почти всюду. Измеримость предела последовательности измеримых функций, сходящихся почти всюду. Связь между сходимостью почти всюду и по мере. Контрпример. Существование сходящейся п.в. подпоследовательности в сходящейся по мере последовательности измеримых функций. Теоремы Лузина и Егорова.*

С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Колмогоров, А. Н.. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник для матем. спец. ун-тов / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. - 6-е изд., испр. - Москва : Наука, 1989. – 624 с. : С. 323–334 – изучение теоретического материала, С. 325-327 – рассмотрение примеров.
2. Богданов, А.Ю. Лекции по функциональному анализу : учеб. пособие / А.Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГУ, 2003. – 66 с. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/984/bogdanov.pdf
С. 35-39 – изучение теоретического материала и рассмотрение примеров.
3. Богданов, А.Ю. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учебно-методическое пособие / А.Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГУ, 2008. – 33 с. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/985/bogdanov1.pdf С. 9 решение задач.

Тема 8. *Определенный интеграл Лебега. Существование интеграла Лебега от ограниченной измеримой функции и от функции, для которой сходится ряд с единичными интервалами. Теоремы Б. Леви, Фату и Лебега (без доказательств). Теорема о полноте пространства $L_1[0,1]$. Теорема о сепарабельности пространства $L_1[0,1]$ (плотность в нем непрерывных функций).*

С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Колмогоров, А. Н.. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник для матем. спец. ун-тов / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. - 6-е изд., испр. - Москва : Наука, 1989. – 624 с. : С. 334-352, 430-436 – изучение теоретического материала, С. 352-355 – рассмотрение примеров.
2. Богданов, А.Ю. Лекции по функциональному анализу : учеб. пособие / А.Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГУ, 2003. – 66 с. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/984/bogdanov.pdf
С. 39-43 – изучение теоретического материала и рассмотрение примеров.

3. Богданов, А.Ю. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учебно-методическое пособие / А.Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГУ, 2008. – 33 с. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/985/bogdanov1.pdf С. 10 решение задач.

Контрольные вопросы по разделу

1. Как строится мера Лебега для полукольца прямоугольников?
2. Какие множества называются элементарными?
3. Дайте определение σ-аддитивности меры.
4. Чем отличается алгебра от σ-алгебры?
5. Следует ли из σ-аддитивности меры Лебега её непрерывность?
6. Что можно сказать об измеримости по Лебегу произвольного замкнутого ограниченного множества?
7. В виде суммы каких мер представима произвольная мера Лебега-Стилтьеса?
8. Являются ли измеримые по Борелю функции измеримыми?
9. Что можно сказать об измеримости композиции измеримых функций?
10. Измерима и интегрируема ли по Лебегу функция Дирихле?
11. Какие измеримые функции называются эквивалентными?
12. Какой непрерывной функции эквивалентна функция Дирихле?
13. Следует ли из сходимости почти всюду сходимость по мере?
14. Следует ли из сходимости по мере сходимость почти всюду?
15. Может ли быть любая измеримая функция сделана непрерывной за счет её изменения на множестве нулевой меры?
16. Является ли пространство $L_1[0,1]$ полным метрическим пространством?
17. Является ли пространство $L_1[0,1]$ сепарабельным метрическим пространством?

Задачи для самостоятельной работы по разделу

1. Пусть функция $f(x)$ измерима. Доказать, что следующие функции измеримы:

    1) $f(x)+k, \quad k\in \mathrm{R}$;
    2) $\lambda\ f(x), \quad \lambda \in \mathrm{R}$.

2. Пусть функция $f(x)$ измерима. Доказать, что следующие функции измеримы:

    1) $f^{+}(x)=\max\{0,\ f(x)\}$;
    2) $f^{-}(x)=\max\{0,-f(x)\}$;
    3) $f(x)+g(x)$;
    4) $f(x)-g(x)$;
    5) $f(x)\cdot g(x)$;
    6) $\dfrac{f(x)}{g(x)}, \quad (g(x)\neq 0)$.

3. Показать, что если функция $f(x)$ непрерывна почти всюду, то она измерима.

4. Построить пример неизмеримого множества (по Лебегу).

5. Вычислить по определению интеграл Лебега $\int_0^1 \sqrt{x}dx$.

6. Вычислить по определению интеграл Лебега $\int_0^1 \sqrt[3]{x}dx$.

Раздел 3. Линейные нормированные пространства. Линейные непрерывные функционалы и операторы

Тема 9. *Линейные нормированные и банаховы пространства. Линейные непрерывные функционалы, их норма. Эквивалентность непрерывности и ограниченности. Сопряженное пространство, его полнота и нетривиальность. Теорема о пространстве, сопряженном к l_p, $p\geq 1$. Теорема Хана-Банаха.*

С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Колмогоров, А. Н.. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник для матем. спец. ун-тов / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. - 6-е изд., испр. - Москва : Наука, 1989. – 624 с. : С. 139-161, 203-212 – изучение теоретического материала, С. 162-163, 215-218 – рассмотрение примеров.

2. Богданов, А.Ю. Лекции по функциональному анализу : учеб. пособие / А.Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГУ, 2003. – 66 с. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/984/bogdanov.pdf
С. 44-48 – изучение теоретического материала и рассмотрение примеров.

3. Богданов, А.Ю. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учебно-методическое пособие / А.Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГУ, 2008. – 33 с. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/985/bogdanov1.pdf С. 10-11 решение задач.

Тема 10. *Линейные ограниченные операторы, их норма. Компактные операторы. Примеры. Некомпактность единичного оператора в бесконечномерном баховом пространстве. Теорема Банаха-Штейнгауза. Теорема Банаха об обратном операторе. Достаточность одного из условий Ker A=0 или Im=L для обратимости оператора* ***A∈L(L)*** *в конечномерном пространстве L****.*** *Примеры необходимых операторов, для которых выполнено одно из условий Ker A=0 или Im=L..*

С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Колмогоров, А. Н.. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник для матем. спец. ун-тов / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. - 6-е изд., испр. - Москва : Наука, 1989. – 624 с. : С. 251-265 – изучение теоретического материала, С. 252-254 – рассмотрение примеров.

2. Богданов, А.Ю. Лекции по функциональному анализу : учеб. пособие / А.Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГУ, 2003. – 66 с. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/984/bogdanov.pdf
С. 48-51 – изучение теоретического материала и рассмотрение примеров.

3. Богданов, А.Ю. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учебно-методическое пособие / А.Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГУ, 2008. – 33 с. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/985/bogdanov1.pdf С. 12 решение задач.

Контрольные вопросы по разделу

1. Какие линейные пространства называются изоморфными?
2. Что такое бесконечная линейно независимая система?
3. Дать определение базиса конечномерного линейного пространства.
4. Следует ли из непрерывности линейного функционала его ограниченность?
5. Следует ли из ограниченности линейного функционала его непрерывность?
6. Может ли быть сопряжённое пространство L^* банаховым, если исходное линейное нормированное пространство L не банахово?
7. Всегда ли сопряжённое пространство нетривиально, если исходное ЛНП нетривиально?
8. Дать определение базиса бесконечномерного линейного пространства.
9. Верно ли утверждение, что если исходное ЛНП L бесконечномерно, то и сопряжённое пространство L^* бесконечномерно?
10. Равносильно ли утверждение о непрерывности и ограниченности для линейного оператора?
11. Сформулируйте первый принцип функционального анализа.
12. Сформулируйте второй принцип функционального анализа.
13. Сформулируйте третий принцип функционального анализа.

Задачи для самостоятельной работы по разделу

1. Являются ли следующие нормы корректными в пространстве $L=\{z=(x,y)\mid x,y\in \mathrm{R}\}=\mathrm{R}^2$:

   1) $\|z\|=|x|+\frac{1}{2}|y|$;

   2) $\|z\|=\max\{|x+2y|,|x-y|\}$.

2. Пусть в пространстве L заданы нормы: $\|\ \|_1$ и $\|\ \|_2$. Говорят, что $\|\ \|_1$ эквивалентна $\|\ \|_2$ $(\|\ \|_1\sim\|\ \|_2)$, если $\exists \mathrm{C}_1$ и C_2 : $\mathrm{C}_1\|x\|_1\le\|x\|_2\le \mathrm{C}_2\|x\|_1 \quad \forall x\in L$. Показать, что в пространстве $C[0,1]$ следующие нормы не эквивалентны: $\|f\|_1=\max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)|$, $\|f\|_2=\left(\int\limits_0^1 f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

3. Найти общий вид линейного функционала на R^n.

4. Нормой линейного функционала f на нормированном пространстве L называется величина $\sup\limits_{x\in L,\|x\|=1}|f(x)|$.

   Найти норму линейного функционала $f:\mathrm{R}^2\to\mathrm{R}$, $f(z)=ax+by$, $z=(x,y)\in\mathrm{R}^2$, если норма в $L=\mathrm{R}^2$ определена следующим образом:

   1) $\|z\|=\sqrt{x^2+y^2}$;

   2) $\|z\|=\max(|x|,|y|)$;

   3) $\|z\|=|x|+|y|$;

4) $\|z\| = \max\{|x+3y|, |x-3y|\}$.

Нарисовать во всех случаях единичную сферу в L и L^*.

5. Пусть $L = \mathrm{R}^2$ – нормированное пространство; $\|z\| = \max\{|x|, |y|\}$ $L_0 \subset L$ – подпространство в L, $L_0 = \{(x, y) \mid y = 0\}$.
   f_0 – линейный функционал на L_0: $f_0(x, y) = 2x$.
   Продолжить f_0 до линейного функционала на всём L с сохранением нормы. Будет ли единственным такое продолжение?

6. Пусть $F : C[0,1] \to \mathrm{R}$ - линейный функционал: $F(f) = f(0) - f(1)$. Найти $\|F\|$.

7. Пусть $f : l_\infty \to \mathrm{C}$, $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} x_k$. Найти $\|f\|$.

8. Пусть $f : l_2 \to \mathrm{C}$, $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} x_k$. Найти $\|f\|$.

9. Пусть $F : C[0,1] \to \mathrm{R}$, $F(f) = \int_0^1 x^2 f(x) dx$. Найти $\|F\|$.

10. Пусть $F : C[0,\pi] \to \mathrm{R}$, $F(f) = \int_0^{\pi} \cos(x) f(x) dx$. Найти $\|F\|$.

11. Пусть $F : L_1[0,\pi] \to \mathrm{R}$ – функционал на пространстве интегрируемых по Лебегу функций с нормой $\|f\| = \int_0^{\pi} |f(x)| dx$. $F(f) = \int_0^{\pi} \sin(x) f(x) dx$. Найти $\|F\|$.

12. Пусть $F : L_p[0,\pi] \to \mathrm{R}$ – функционал на пространстве интегрируемых по Лебегу функций с нормой $\|f\| = \left(\int_0^{\pi} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$, $F(f) = \int_0^{\pi} \sin(x) f(x) dx$. Оценить сверху $\|F\|$.

13. Пусть $A: L \to L$ – линейный оператор на нормированном пространстве L. Нормой оператора A называют величину $\|A\| = \sup_{x \in L, \|x\| = 1} \|Ax\|$. Найти $\|A\|$, если:
    1) $L = C[0,1]$ с нормой $\|f\| = \max_{0 \le x \le 1} |f(x)|$, $Af(x) = \varphi(x) \cdot f(x)$;

2) $L = L_2[0,1]$ с нормой $\| f\| = \left(\int\limits_0^1 | f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$, $\quad Af(x) = \varphi(x) \cdot f(x)$

где $\varphi(x)$ – некоторая непрерывная на $[0,1]$ функция.

Раздел 4. Предгильбертовы и гильбертовы пространства

Тема 11. *Предгильбертово пространство. Неравенство Коши-Буняковского, нормируемость. Гильбертово пространство.*

С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Колмогоров, А. Н.. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник для матем. спец. ун-тов / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. - 6-е изд., испр. - Москва : Наука, 1989. – 624 с. : С. 166-168 – изучение теоретического материала, С. 169-170 – рассмотрение примеров.
2. Богданов, А.Ю. Лекции по функциональному анализу : учеб. пособие / А.Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГУ, 2003. – 66 с. URL
http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/984/bogdanov.pdf
С. 51-52 – изучение теоретического материала и рассмотрение примеров.
3. Богданов, А.Ю. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учебно-методическое пособие / А.Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГУ, 2008. – 33 с. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/985/bogdanov1.pdf С. 12 решение задач.

Тема 12. *Теорема об ортогонализации системы. Полные и замкнутые системы. Теорема о существовании замкнутых ОНС в сепарабельном гильбертовом пространстве. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Эквивалентность полноты и замкнутости для систем. Изоморфизм бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространств. Теорема Рисса-Фишера.*

С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Колмогоров, А. Н.. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник для матем. спец. ун-тов / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. - 6-е изд., испр. - Москва : Наука, 1989. – 624 с. : С. 171-189 – изучение теоретического материала, С. 190-191 – рассмотрение примеров.
2. Богданов, А.Ю. Лекции по функциональному анализу : учеб. пособие / А.Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГУ, 2003. – 66 с. URL
http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/984/bogdanov.pdf
С. 53-57 – изучение теоретического материала и рассмотрение примеров.
3. Богданов, А.Ю. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учебно-методическое пособие / А.Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГУ, 2008. – 33 с. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/985/bogdanov1.pdf С. 12 решение задач.

Тема 13. *Сильная и слабая сходимость элементов в гильбертовом и банаховом пространствах. Пример слабо сходящейся последовательности, не сходящейся сильно. Сильная ограниченность слабо сходящейся последовательности..*

С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Колмогоров, А. Н.. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник

для матем. спец. ун-тов / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. - 6-е изд., испр. - Москва : Наука, 1989. – 624 с. : С. 225-234 – изучение теоретического материала, С. 230-231 – рассмотрение примеров.
2. Богданов, А.Ю. Лекции по функциональному анализу : учеб. пособие / А.Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГУ, 2003. – 66 с. URL
http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/984/bogdanov.pdf
С. 57 – изучение теоретического материала и рассмотрение примеров.
3. Богданов, А.Ю. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учебно-методическое пособие / А.Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГУ, 2008. – 33 с. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/985/bogdanov1.pdf С. 12 решение задач.

Контрольные вопросы по разделу

1. Обязательно ли предгильбертово пространство должно быть линейным?
2.Сформулировать неравенство Коши-Буняковского для пространства l_2.
3. Покажите, что любое предгильбертово пространство является нормированным.
4. Какое гильбертово пространство называется евклидовым?
5. Обязательно ли гильбертово пространство является сепарабельным?
6. В чем заключается эквивалентность понятий полноты и замкнутости систем функций в гильбертовом пространстве?
7. Верно ли, что любые два сепарабельных гильбертовых пространства изоморфны?
8. Верно ли, что сепарабельное гильбертово пространство и его сопряжённое пространство всегда изоморфны?
9. Приведите пример ПОНС в пространстве l_2.
10. Приведите пример комплексной ПОНС в пространстве $L_2[-\pi,\pi]$.
11. Приведите пример вещественной ПОНС в пространстве $L_2[-\pi,\pi]$.
12. Можно ли утверждать, что последовательность ограничена, если она слабо сходится?
13. Привести пример слабо сходящейся последовательности, не сходящейся сильно.

Раздел 5. Спектр и резольвента оператора. Сопряжённые и самосопряжённые операторы

Тема 14. *Спектр оператора в банаховом пространстве. Резольвентное множество и его открытость (замкнутость спектра). Непустота спектра. Верхняя оценка спектрального радиуса нормой оператора. Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве, их существование. Теорема о разложении пространства в прямую сумму замыкания образа оператора и ядра сопряженного. Спектр сопряженного оператора. Самосопряженные операторы, их спектр. Равенство спектрального радиуса норме оператора для самосопряженного оператора.*
С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Колмогоров, А. Н.. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник для матем. спец. ун-тов / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. - 6-е изд., испр. - Москва : Наука, 1989. – 624 с. : С. 265-271 – изучение теоретического материала, С. 266 – рассмотрение примеров.
2. Богданов, А.Ю. Лекции по функциональному анализу : учеб. пособие / А.Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГУ, 2003. – 66 с. URL
http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/984/bogdanov.pdf
С. 58-60 – изучение теоретического материала и рассмотрение примеров.
3. Богданов, А.Ю. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учебно-методическое пособие / А.Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГУ, 2008. – 33 с. URL

http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/985/bogdanov1.pdf С. 12-13 решение задач.

Тема 15. *Критерий компактности оператора в гильбертовом пространстве. Компактность оператора, сопряженного к компактному. Необратимость компактного оператора. Альтернатива Фредгольма. Теорема о спектре самосопряженного оператора. Спектр компактного самосопряженного оператора. Теорема Гильберта.*

С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Колмогоров, А. Н.. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник для матем. спец. ун-тов / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. - 6-е изд., испр. - Москва : Наука, 1989. – 624 с. : С. 272-287, 544-550 – изучение теоретического материала, С. 545 – рассмотрение примеров.
2. Богданов, А.Ю. Лекции по функциональному анализу : учеб. пособие / А.Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГУ, 2003. – 66 с. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/984/bogdanov.pdf С. 50, 60-63 – изучение теоретического материала и рассмотрение примеров.
3. Богданов, А.Ю. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учебно-методическое пособие / А.Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГУ, 2008. – 33 с. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/985/bogdanov1.pdf С. 12-13 решение задач.

Контрольные вопросы по разделу

1. Содержатся ли собственные значения оператора в спектре?
2. Привести пример непустого спектра оператора, у которого нет собственных значений.
3. Открыто или замкнуто резольвентное множество?
4. Открыт или замкнут спектр оператора?
5. Единственен ли сопряжённый оператор?
6. Чему равна норма сопряжённого оператора?
7. Верно ли утверждение, что спектр самосопряжённого оператора вещественный?
8. Компактен ли сопряженный оператор для компактного оператора?
9. Может ли спектр компактного оператора быть несчётным?
10. Сходится ли сильно компактный образ слабо сходящейся последовательности?
11. Сформулировать Альтернативу Фредгольма в самосопряжённом случае.
12. Если оператор самосопряжён и компактен, то существует ли ПОНС, составленная из его собственных функций?

Задачи для самостоятельной работы по разделу

1. Пусть $A: C[0,1] \to C[0,1]$ $Af(x) = \int\limits_0^x \cos(t)\, f(t)dt$. Доказать, что оператор A компактен.
2. Пусть $A: l_2 \to l_2$ $Ax = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n, \ldots)$. Доказать, что A компактен $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |\lambda_n| \to 0$ при $n \to \infty$.
3. Пусть $A: C[0,1] \to C[0,1]$ $Af(x) = \varphi(x)\, f(x);\ \varphi(x) \in C[0,1]$. Доказать, что A компактен $\Leftrightarrow \varphi(x) \equiv 0$.

4. Пусть $S: l_2 \to l_2$ - оператор правого сдвига, т.е. $S(x_1,\dots,x_n,\dots) = (0, x_1,\dots,x_n,\dots)$. Найти S^*.

5. Пусть $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ $Af(x) = \varphi(x) f(x)$; $\varphi(x): \mathrm{R} \to \mathrm{C}$ - непрерывная функция. Найти A^*.

6. Пусть $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ $Af(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$. Найти A^*.

7. Пусть S – оператор правого сдвига в l_2 (см. задачу 53). Найти $\rho(S)$ и $\sigma(S)$ (резольвенту и спектр S).

8. Пусть $A: C[0,1] \to C[0,1]$ $Af(x) = xf(x)$. Найти $\rho(A), \sigma(A)$.

9. Пусть $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ $Af(x) = xf(x)$. Найти $\rho(A), \sigma(A)$.

10. Доказать, что $\forall A \in L(H)$ (H – гильбертово пространство) выполняется равенство $\|A\| = \|A^*\| = \sqrt{\|A^* A\|}$.

11. Пусть $A \in L(C[-1,1])$, $Af(x) = f(-x)$. Найти $\sigma(A)$ и $\rho(A)$.

12. Пусть $A \in L(C^1[0,1])$, $Af(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$. Найти $\sigma(A)$ и $\rho(A)$.

13. Пусть $A \in L\left(C\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $Af(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x-y) f(y)dy$. Найти собственные значения и собственные функции оператора A.

14. Для каких $g(x) \in L_2[0,\pi]$ разрешимо уравнение $f(x) - \int\limits_0^{\pi} \sin(x+y) f(y)dy = g(x)$?

15. Для каких $\lambda \in \mathrm{C}$ разрешимо уравнение $f(x) - \lambda \int\limits_0^{a} \mathrm{e}^{x-y} f(y)dy = 1$?

Раздел 6. Обобщённые функции

Тема 16. *Пространство основных функций, его нетривиальность, сходимость в нем. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Примеры. Бесконечная дифференцируемость обобщенных функций. Сходимость обобщенных функций, δ-образные последовательности. Примеры рядов, сходящихся в смысле обобщенных* *функций. Преобразование Фурье обобщенных функций.*

С теоретическим и практическим материалом по данной теме можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Колмогоров, А. Н.. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник для матем. спец. ун-тов / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. - 6-е изд., испр. - Москва : Наука, 1989. – 624 с. : С. 235-251 – изучение теоретического материала, С. 238-239 – рассмотрение примеров.
2. Богданов, А.Ю. Лекции по функциональному анализу : учеб. пособие / А.Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГУ, 2003. – 66 с. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/984/bogdanov.pdf
С. 63-65 – изучение теоретического материала и рассмотрение примеров.
3. Богданов, А.Ю. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учебно-методическое пособие / А.Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГУ, 2008. – 33 с. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/985/bogdanov1.pdf С. 13 решение задач.

Контрольные вопросы по разделу

1. Дать определение пространства пробных (основных функций).
2. Привести пример нетривиальной основной функции.
3. Является ли множество пробных функций плотным в пространстве $L_1(R)$?
4. Является ли множество пробных функций плотным в пространстве $L_2(R)$?
5. Дать определение обобщённой функции.
6. Дать определение регулярной обобщённой функции.
7. Привести пример сингулярной обобщённой функции.
8. Вычислить первую производную δ-функции.
9. Какая функция является фундаментальным решением линейного дифференциального оператора?
10. Как с помощью фундаментального решения найти решение неоднородного линейного ДУ с произвольной правой частью?